**一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选前的字母填在答题纸指定位置上。**

（1）若反常积分收敛，则（　）。

A. 且

B. 且

C. 且

D. 且

【答案】C

【解析】，而当时收敛，而此时不影响，，而当时收敛，此时不影响，因此选择C.

（2）已知函数，则的一个原函数是（　）。

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】对函数做不定积分可得原函数，，因此选择D.

（3）若是微分方程的两个解，则=（　）。

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】将代入微分方程可得：



而将代入微分方程可得：



将这两个式子相加可得：

两个式子相减可得：

因此可得

故选择A.

（4）已知函数，则（　）。

A. 是的第一类间断点

B. 是的第二类间断点

C. 在处连续但不可导

D. 在处可导

【答案】D

【解析】，因此在处连续，

，而，而，因此

，而左右两边的极限均为1，因此，故在可导，选择D.

（5）设是可逆矩阵，且与相似，则下列结论错误的是（　）。

A. 与相似

B. 与相似

C. 与相似

D. 与相似

【答案】C

【解析】因为与相似，因此存在可逆矩阵，使得，于是有：

，即，

，因此，

，因此，

而C选项中，不一定等于，故C不正确，选择C.

（6）设二次型，则在空间直角坐标系下表示的二次曲面为（　）。

A.单叶双曲面

B.双叶双曲面

C.椭球面

D.柱面

【答案】B

【解析】二次型对应的矩阵，根据可以求得特征值为，，因此二次型的规范形为，故可得，即，因此对应的曲面为双叶双曲面，选择B.

（7）设随机变量，记，则（　）。

A. 随着的增加而增加

B. 随着的增加而增加

C. 随着的增加而减少

D. 随着的增加而减少

【答案】B

【解析】，因此选择B，随着的增加而增加.

（8）随机试验有三种两两不相容的结果，且三种结果发生的概率均为，将试验独立重复做2次，表示2次试验中结果发生的次数，表示2次试验发生的次数，则于的相关系数为（　）。

A.

B.

C.

D.

【答案】

【解析】根据题意可知，因此有

，



因此可得，故可得相关系数为：



**二、填空题，9~14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答疑纸指定位置上.**

（9）\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】



（10）向量场的旋度\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】由旋度公式可得

（11）设函数可微，由方程确定，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】将两边分别关于求导可得：

，

。

将代入原式可得，因此将代入关于求导的式子可得：

，因此，代入关于求导的式子可得：，因此有，故可得.

（12）设函数，且，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】根据，可得：

，然后求二阶导数为：



此时（存疑）

（13）行列式\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】.

（14）设为来自总体的简单随机样本，样本均值，参数的置信度为0.95的双侧知心区间的置信上限为10.8，则的置信度为0.95的双侧置信区间为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】，

因为，所以，因此可得，故可得置信区间为.

**三、解答题：15~23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

（15）（本题满分10分）

已知平面区域，计算二重积分.

【答案】

【解析】



（16）（本题满分10分）

设函数满足方程，其中.

（Ⅰ）证明：反常积分收敛；

（Ⅱ）若，求的值.

【答案】（Ⅰ）；（Ⅱ）

【解析】

（Ⅰ）特征方程为，由可知，特征方程有两个不同的实根，即且，因此二阶常系数齐次线性方程的解为：，故可得



因此收敛.

（Ⅱ）由，可得：

，解得

代入可得



（17）（本题满分10分）

设函数满足，且，是从点到点的光滑曲线，计算曲线积分，并求的最小值.

【答案】3

【解析】

根据可得：



又故可知，因此

所以，



设，则有

因此，因此积分与路径无关

故



因为，所以，令可得

而，因此，因此当有最小值为.

（18）（本题满分10分）

设有界区域由平面与三个坐标平面围成，为整个表面的外侧，计算曲面积分.

【答案】

【解析】

，令

由高斯公式可知：



（19）（本题满分10分）

已知函数可导，且.设数列满足，证明：

（Ⅰ）级数绝对收敛；

（Ⅱ）存在，且.

【答案】利用绝对收敛定义证明即可。

【解析】

（Ⅰ）证：，因此有



显然收敛，因此绝对收敛.

（Ⅱ）记，因此得，因为级数收敛，因此存在，因此存在，不妨设，

，由可得

，两边取极限可得，即

若，这与矛盾，若，与矛盾，因此可得，即.

（20）（本题满分11分）

设矩阵.

当为何值时，方程无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

【答案】时，无解；时，有无穷多解，；

且时，有唯一解，

【解析】

增广矩阵为

因此当即且时，有唯一解；

设，代入，解得

当代入

设，因此可得，这两个式子是矛盾的，因此方程组无解；

当代入，此时方程组有无穷多解，将代入可得，解得，不妨设为自由未知量，则可得

（21）（本题满分11分）

已知矩阵

（Ⅰ）求；

（Ⅱ）设3阶矩阵满足.记，将分别表示成的线性组合.

【答案】（Ⅰ）

（Ⅱ）





【解析】

（Ⅰ）利用相似对角化，由得到特征值为，

当时，代入中，求解方程组的解就是特征向量，即

同理得到其他的两个特征向量分别为：对应的特征向量为，对应的特征向量为，

设，则有，因此可得

，根据矩阵可以求得其逆矩阵为

因此有



（Ⅱ），因此可得、，所以



因此有





（22）（本题满分11分）

设二维随机变量在区域上服从均匀分布，令



（Ⅰ）写出的概率密度；

（Ⅱ）问与是否相互独立？并说明理解；

（Ⅲ）求的分布函数.

【答案】

（Ⅰ）

（Ⅱ）与不独立，因为

（Ⅲ）的分布函数为：



【解析】

（Ⅰ）区域的面积为，因此服从均匀分布，因此有



（Ⅱ）与不独立



因此，故不独立.

（Ⅲ）



因此可得



（23）（本题满分11分）

设总体的概率密度为，其中为未知参数，为总体的简单随机抽样，令.

（Ⅰ）求的概率密度；

（Ⅱ）确定，使得为的无偏估计.

【答案】

（Ⅰ）的概率密度：



（Ⅱ）

【解析】

（Ⅰ）根据题意，独立同分布，因此可得



当时，；

当时，；

当时，，因此可得概率密度函数为：



（Ⅱ），根据题意，如果为的无偏估计，则有

，因此可得.